	ГБПОУ «Пермский политехнический колледж имени Н.Г. Славянова»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ

для реализации Программы подготовки специалистов среднего звена
по специальности
09.02.01 Компьютерные системы и комплексы
(технологический профиль профессионального образования)

Рассмотрено и одобрено на заседании
Предметной цикловой комиссией
«Информационные технологии»
Протокол №14
от 29 августа 2022г.
Председатель ПЦК
___________________ Н.В. Кадочникова

2022

СОДЕРЖАНИЕ

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Практические занятия относятся к основным видам учебных занятий и составляют важную часть теоретической и профессиональной практической подготовки, являются формой организации учебного процесса, направленной на выработку у обучающихся практических умений для изучения последующих учебных дисциплин, профессиональных модулей и для решения профессиональных задач.

Выполнение обучающимся практических работ направлено на:

- обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных теоретических знаний по конкретным темам учебных дисциплин профессиональных модулей;

- формирование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности;

- развитие интеллектуальных умений у будущих специалистов: аналитических, проектировочных, конструктивных и др.;

- выработку при решении поставленных задач таких профессионально значимых качеств, как самостоятельность, ответственность, точность, творческая инициатива.

Практические занятия проводятся в учебных кабинетах лабораториях, мастерских. Необходимыми структурными элементами практического занятия, помимо самостоятельной деятельности студентов, являются инструктаж, проводимый преподавателем, а также анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированными умениями.

Наряду с формированием умений и навыков в процессе практических занятий обобщаются, систематизируются, углубляются и конкретизируются теоретические знания, вырабатывается способность и готовность использовать теоретические знания на практике.

Содержание практического занятия определяется перечнем профессиональных умений по конкретной учебной дисциплине (профессиональному модулю), а также характеристикой профессиональной деятельности выпускников, требованиями к результатам освоения основной профессиональной образовательной программы.

По каждой учебной дисциплине и междисциплинарному курсу для обучающихся разработаны методические указания по выполнению практических работ.

Работы, носящие репродуктивный характер, отличаются тем, что при их проведении студенты пользуются подробными инструкциями, в которых указаны: цель работы, пояснения (теория, основные характеристики), оборудование, аппаратура, материалы и их характеристики, порядок выполнения работы, таблицы, выводы (без формулировки), контрольные вопросы, учебная и специальная литература.

Работы, носящие частично поисковый характер, отличаются тем, что при их проведении студенты не пользуются подробными инструкциями, им не дан порядок выполнения необходимых действий, и требуют от студентов самостоятельного подбора оборудования, выбора способов выполнения работы в инструктивной и справочной литературе и др.

Работы, носящие поисковый характер, характеризуются тем, что студенты должны решить новую для них проблему, опираясь на имеющиеся у них теоретические знания.

Формы организации студентов на практических занятиях: фронтальная, групповая и индивидуальная.

При фронтальной форме организации занятий все студенты выполняют одновременно одну и ту же работу.

При групповой форме организации занятий одна и та же работа выполняется микро-группами по 2—5 человек.

При индивидуальной форме организации занятий каждый студент выполняет индивидуальное задание.

Оценки за выполнение практических работ являются показателями текущей успеваемости студентов по учебной дисциплине.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Методические указания для обучающихся по выполнению практических работ по учебным дисциплинам и междисциплинарным курсам

Код	Наименование учебной дисциплины, профессионального модуля, междисциплинарного курса	№ Приложения
ОУД.01	Русский язык	1
ОУД.02	Литература	2
ОУД.03	Иностранный язык	3
ОУД.04	Математика	4
ОУД.05	История	5
ОУД.06	Физическая культура	6
ОУД.07	Основы безопасности жизнедеятельности	7
ОУД.08	Астрономия	8
ОУД.09	Информатика	9
ОУД.10	Физика	10
ОУД.11	Родная литература	11
ИУК.01	Основы профессиональной деятельности	12
СГ.01	История России	13
СГ.02	Иностранный язык в профессиональной деятельности	14
СГ.03	Безопасность жизнедеятельности	15
СГ.04	Физическая культура	16
СГ.04	Адаптивная физическая культура	17
СГ.05	Основы финансовой грамотности	18
СГ.06	Экологические основы природопользования	19
СГ.07	Психология общения	20
ОП.01	Элементы высшей математики	21
ОП.02	Дискретная математика	22
ОП.03	Инженерная компьютерная графика	23
ОП.04	Основы электротехники и электронной техники	24
ОП.05	Операционные системы и среды	25
ОП.06	Основы алгоритмизации и программирования	26
ОП.07	Метрология и электротехнические измерения	27
ОП.08	Информационные технологии	28
ОП.09	Сетевые технологии	29
МДК.01.01	Основы проектирования цифровой техники	33
МДК.01.02	Разработка и прототипирование цифровых систем	34
МДК.02.01	Микропроцессорные системы	35
МДК.02.02	Программирование микроконтроллеров	36
МДК.02.03	Системы управления базами данных	37
МДК.02.04	Разработка прикладных приложений	38

ПРИЛОЖЕНИЕ 21

**Методические указания
для обучающихся по выполнению практических работ
по учебной дисциплине
ОП.01 Элементы высшей математики**

Автор: Рягузова Инна Васильевна,
ГБПОУ «Пермский политехнический колледж имени Н.Г. Славянова», преподаватель высшей квалификационной категории

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Методические указания по выполнению практических занятий обучающимися по дисциплине ОП.01 *Элементы высшей математики* предназначены для обучающихся по специальности 09.02.01 *Компьютерные системы и комплексы*.

Цель методических указаний: оказание помощи обучающимся в выполнении практических работ по дисциплине ОП.01 *Элементы высшей математики.*

Настоящие методические указания содержат работы, которые позволят обучающимся закрепить теоретические знания, сформировать необходимые умения и навыки деятельности по специальности, направлены на формирование следующих компетенций:

ОК 1. Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам.
ОК 2. Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности.
ОК 04. Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде.
ОК 09. Пользоваться профессиональной документацией на государственном и иностранном языках.
ПК 1.1. Анализировать требования технического задания на проектирование цифровых систем.
ПК 2.1 Проектировать, разрабатывать и отлаживать программный код модулей управляющих программ
В результате выполнения практических занятий по дисциплине ОП.01 *Элементы высшей математики* специальности 09.02.01 *Компьютерные системы и комплексы* обучающиеся должны:
уметь:

- распознавать задачу и/или проблему в профессиональном и/или социальном контексте;
- анализировать задачу и/или проблему и выделять её составные части;
- определять этапы решения задачи;
- определять задачи для поиска информации;
- определять необходимые источники информации;
- планировать процесс поиска;
- структурировать получаемую информацию.

знать:

- актуальный профессиональный и социальный контекст, в котором приходится работать и жить;
- основные источники информации и ресурсы для решения задач и проблем в профессиональном и/или социальном контексте;
- алгоритмы выполнения работ в профессиональной и смежных областях;
- номенклатура информационных источников, применяемых в профессиональной деятельности;
- приемы структурирования информации;
- формат оформления результатов поиска информации, современные средства и устройства информатизации.

Описание каждого практического занятия содержит: раздел, тему, количество часов, цели работы, что должен знать и уметь обучающийся, теоретическую часть, порядок выполнения работы, контрольные вопросы, учебно-методическое и информационное обеспечение.

На выполнение практических занятий по дисциплине ОП.01 *Элементы высшей математики* отводится *50 часов.*

Содержание практических занятий

Практическая работа №1

Раздел 1. Функции, пределы и непрерывность

Тема: Вычисление пределов функций.

Количество часов: 2

Цели: расширить представления о замечательных пределах функций, познакомиться с основными видами неопределенностей. Закрепить на практике навыки вычисления неопределенностей.

Задачи: уметь вычислять пределы функций с помощью раскрытия неопределенностей и формул замечательных пределов.

Теоретический материал

Определение: Конечное число А называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное δ = δ(ε), что для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x0| < \delta,$ соответствующие значения функции удовлетворяют неравенству $|f(x) - A| < \varepsilon$. Для обозначения такого предела используют символику:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

В случае, когда функция непрерывна в точке a, ее предел при $x \to a$ равен значению функции в данной точке.

При решении задач полезно помнить следующие основные свойства пределов функций:

1. Предел постоянного числа равен самому этому числу.
2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела

$$\lim_{x \to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

3. Предел суммы (или разности) функций равен сумме (или разности) их пределов, если оба предела являются конечными

$$\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

4. Предел произведения функций равен произведению их пределов, если оба предела являются конечными

$$\lim_{x \to a}[f(x) g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

5. Предел отношения функций равен отношению их пределов, если оба предела являются конечными и знаменатель не обращается в нуль

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \textit{если} \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$$

Замечательные пределы

- Первый замечательный предел:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

- Второй замечательный предел:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

<u>Порядок выполнения работы</u>

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

<u>Задание:</u> вычислить пределы функций

Вариант № 1	*Вариант № 2*
$\lim\limits_{x\to -1}\frac{(3x^2-6x+5)^3}{x-1}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x-x^2}{x+3}$
$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2-x-2}$
$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}}$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+14x^2}{1+2x+7x^2}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^2-7}{9x^4+3x+5}$
$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2+3x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x}{5x+10}$
$\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin7x}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{sinx}{3x}$
$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{5x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{6x}$

Контрольные вопросы:

1. Что называют пределом функции в точке?
2. Что называют пределом функции при х стремящемся к ∞?
3. Какие существуют свойства пределов функций?
4. Какие из замечательных пределов использовали при выполнении данных заданий?

Практическая работа №2

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Тема: Вычисление производных сложных функций.

Количество часов: 2

Цели: повторить определение сложной функции. Закрепить на практике нахождение производных сложных функций.

Задачи: уметь находить производные сложных функций.

Теоретический материал

Определение: Функция вида $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ называется *сложной функцией*.
При этом аргумент *x* называют *независимой переменной*, а u - *промежуточным аргументом.*

Производная сложной функции находится по формуле: $\boldsymbol{y' = f'(u) \cdot \varphi'(x)}$

Пример 1: Найти производную функции $y = (1 - 7x)^{10}$.

Решение: представим сложную функцию в виде внешней функции и промежуточной функции:

$y = u^{10}$, где $u = 1 - 7x$.

По формуле производной сложной функции получаем:

$y' = (u^{10})' \cdot (1 - 7x)' = 10(1 - 7x)^9 \cdot (-7) = -70(1 - 7x)^9$

Пример 2: Найти производную функции $y = \sqrt{sinx}$.

Решение: представим сложную функцию в виде внешней функции и промежуточной функции:

$y = \sqrt{u}$, где $u = sinx$

По формуле производной сложной функции получаем:

$y' = \left(\sqrt{u}\right)' \cdot (sinx)' = \frac{1}{2\sqrt{sinx}} \cdot cosx.$

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в рабочей тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы

Задание: найти производные сложных функций:

$y = (x^2 + 3)^7$	$y = 3^{3-8x}$
$y = (3 + 5x)^5$	$y = 10^{-x^2+3x+2}$
$y = (5x^4 + 8x - 5)^4$	$y = ln(7x + 5)$
$y = \frac{4}{(2x^5-9)^3}$	$y = log_5(4x^4 + 8x^2 + 3)$

$y=\frac{2}{(1-9x^2)^2}$	$y=lgsinx$
$y=sin^6x$	$y=cos\left(5x-\frac{\pi}{6}\right)$
$y=\sqrt{3+5x}$	$y=sin\,2x$
$y=(x^2+3)^7$	$y=tg\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)$
$y=\sqrt{5x^3+9}$	$y=cos\frac{x}{2}$
$y=\sqrt{tgx}$	$y=cos\,3x$
$y=\sqrt{1-8x^4}$	$y=sin\frac{x}{3}$
$y=\frac{1}{2x-1}$	$y=sin\,4x-cos\,7x$
$y=\frac{9}{3x^2+7}$	$y=argtgx^5+argtg5x$
$y=\frac{5}{cosx}$	$y=sin^3x+sinx^3+sin3x$
$y=e^{4x+3}$	$y=cos^6 8x$
$y=e^{\sqrt{x}}$	$y=sin^4\sqrt{x}$
$y=e^{arcsinx}$	$y=ln^5 sin2x$

Контрольные вопросы:

1. Что называют производной функции?
2. Как вычислить производную сложной функции?

Практическая работа №3

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Тема: Дифференцирование сложных функций.

Количество часов: 2

Цели: повторить определение сложной функции. Закрепить на практике нахождение производных сложных функций.

Задачи: уметь находить производные сложных функций.

Теоретический материал

Определение: Функция вида $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ называется *сложной функцией*. При этом аргумент x называют *независимой переменной*, а u - *промежуточным аргументом.*

Если y является дифференцируемой функцией от u, а u является дифференцируемой функцией от x, то производная y по x равна произведению производной функции y по u *на* производную функции u по x.

Иначе, если $y(x) = f(\varphi(x))$, то $f(\varphi(x))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание: найти производные сложных функций

1 вариант:	2 вариант:
$y = (x^2 + 3)^7$	$y = sin4x$
$y = \sqrt{5x^3 + 9}$	$y = e^{5x-3}$
$y = e^{4x+3}$	$y = \mathrm{tg}(3x + 2)$
$y = cos9x$	$y = (x^2 + 8)^6$
$y = \ln(7x + 5)$	$y = \sqrt{7x^3 + 9}$

Контрольные вопросы:

1. Что называют производной функции?
2. Как вычислить производную сложной функции?

Практическая работа №4

Раздел 2: Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Тема: Исследование функций с помощью производных 1 и 2 порядка.

Количество часов: 2

Цели: закрепить навыки исследования функций с помощью производных 1 и 2 порядка.

Задачи: уметь исследовать дробно-рациональные функции.

Теоретический материал

При построении графиков функций производную применяют при нахождении промежутков монотонности и экстремумов, при нахождении промежутков выпуклости и точек перегиба.

Общая схема исследования функции

1. Найти область определения функции
2. Исследовать на четность
3. Периодичность
4. Непрерывность, точки разрыва
5. Найти критические точки 1-го рода.
6. Найти промежутки возрастания, убывания и экстремум функции.
7. Найти критические точки 2-го рода
8. Нити промежутки выпуклости графика функции
9. Найти асимптоты графика функции.
10. Найти точки пересечения графика с осями координат
11. Построить график функции.

Порядок выполнения работы:

1. Работу необходимо выполнять в рабочей тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.
7. Геометрические построения следует выполнять карандашом с помощью чертёжных инструментов.

Задание: Исследуем функцию $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ по общей схеме и построим график:

1. $D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$
2. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как область определения не симметрична относительно нуля.
3. Функция непериодическая.
4. Функция непрерывна на $(-\infty;-1)\cup(-1+\infty)$, x=-1-точка разрыва

Вычислим односторонние пределы:

$$\lim_{X\to-1,-0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to-1,-0}\frac{x^3}{2x^2+4x+2}=\lim_{x\to-1,-0}\frac{1}{\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}}=\frac{1}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to-1,+0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\infty$$

Так как односторонние пределы бесконечны, то

x= -1 – точка разрыва 2ого рода.

5. Для нахождения критических точек 1-ого рода надо найти 1-уюпроизводную и найти, где она равна нулю и где она не существует

$$f'(x) = (\frac{x^3}{2(x+1)^2})' = (\frac{(x^3)' \cdot 2(x+1)^2 - (2\cdot(x+1)^2)' \cdot x^3}{4(x+1)^4} = \frac{3x^2 \cdot 2(x+1)^2 - 4(x+1)\cdot x^3}{4(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2(x+1)\cdot(3\cdot(x+1)-2x)}{4(x+1)^4} = \frac{x^2 \cdot (3x+3-2x)}{2(x+1)^3} = \frac{x^2 \cdot (x+3)}{2(x+1)^3};$$

$\frac{x^2 \cdot (x+3)}{2(x+1)^3} = 0$ при x=0 и при x=-3

$\frac{x^2 \cdot (x+3)}{2(x+1)^3}$ - не существует при x=-1

x=0, x=-3, x=-1- критические точки 1-ого рода

6. Исследование на возрастание, убывание и экстремум занесем в таблицу:

X	$(-\infty;-3)$	-3	(-3; -1)	-1	(-1; 0)	0	$(0;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	Не сущ.	+	0	+
$f(x)$	Возрастает	$-3\frac{3}{8}$	убывает		возрастает		возрастает
		max					

7. Для нахождения критических точек 2-ого рода надо найти 2-ую производную и найти, где она равна нулю и где она не существует.

$$f''(x) = (\frac{x^2 \cdot (x+3)}{2(x+1)^3})' = \frac{(x^2(x+3))' \cdot 2(x+1)^3 - (2(x+1)^3)' \cdot x^2(x+3)}{4(x+1)^6} =$$

$$= \frac{(3x^2+6x)\cdot 2(x+1)^3 - 6(x+1)^2 \cdot x^2(x+3)}{4(x+1)^6} = \frac{6x(x+1)^2 \cdot ((x+2)(x+1) - x(x+3))}{4(x+1)^6} =$$

$$= \frac{3x(x^2+2x+x+2-x^2-3x)}{2(x+1)^4} = \frac{3x}{(x+1)^4};$$

$\frac{3x}{(x+1)^4} = 0$ при x=0

$\frac{3x}{(x+1)^4}$ - не существует при x=-1

x=0, x=-1- критические точки 2-ого рода

8. Исследование на выпуклость графика функции занесем в таблицу:

X	$(-\infty;-1)$	-1	(-1 ; 0)	0	$(0;+\infty)$
$f''(x)$	-	Не сущ.	-	0	+
$f(x)$	Выпуклость вверх		Выпуклость вверх	0	Выпуклость вниз
				Точка перегиба	

9. Найдем асимптоты графика функции

a) x= -1 – вертикальная асимптота

b) Для нахождения горизонтальных асимптот вычислим предел:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=\lim_{ъ\to\infty}\frac{x^3}{2x^2+4x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Так как этот предел не существует, горизонтальных асимптот нет.

c) Наклонная асимптота будет существовать в виде y = $kx+b$ если существуют пределы:

$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ $b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-\kappa x)$

Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2(x+1)^2\cdot x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x^3+4x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{2}$$

$k=\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}\cdot x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2-x}{2x^2+4x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{-2}{2}=-1$$

в=-1

$y=\frac{1}{2}\cdot x-1$ - наклонная асимптота

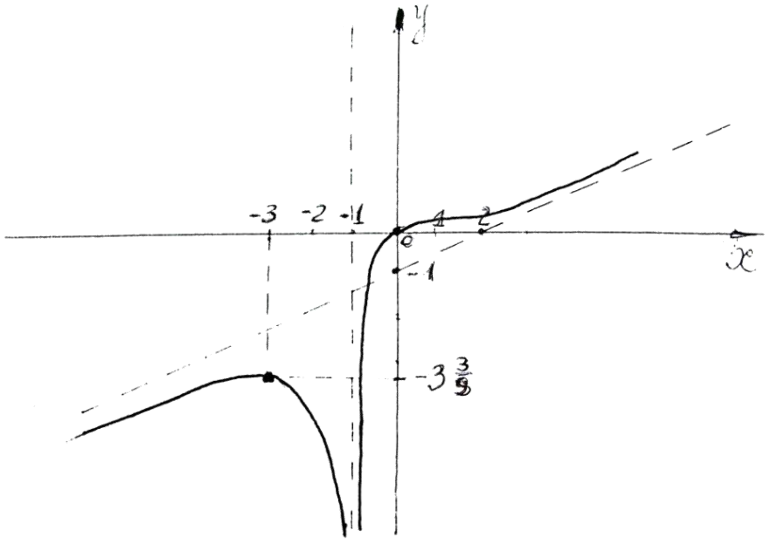
10. Найдем точки пересечения с осями координат

x = 0 $\to$ y=0

y = 0 $\to\frac{x^3}{2(x+1)^2}=0\to x=0$

(0;0) – точка пересечения графика с осью Ox и Oy

11. Строим график функции



Контрольные вопросы:

1) Как найти промежутки монотонности функции?
2) Сформулируйте правило исследования функции на экстремумы
3) Как найти промежутки выпуклости графика функции?
4) Какая прямая называется асимптотой?
5) Как найти асимптоты графика функции?

Практическая работа №5

Раздел 2: Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Тема: Исследование и построение графиков дробно-рациональных функций.

Количество часов: 2

Цели: закрепить навыки исследования и построения графиков функций, используя общую схему исследования и построения графиков функций.

Задачи: уметь исследовать дробно-рациональные функции и строить их графики.

Теоретический материал

При построении графиков функций с помощью производных полезно придерживаться следующего плана:

1. Найти область определения функции, определить точки разрыва, если они имеются.
2. Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность.
3. Определить точки пересечения графика функции с координатными осями, если это возможно.
4. Исследовать функцию на монотонность и экстремумы.
5. Определить промежутки выпуклости графика функции и найти точки перегиба.
6. Найти асимптоты кривой.
7. Построить график.

Порядок выполнения работы:

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.
7. Геометрические построения следует выполнять карандашом с помощью чертёжных инструментов.

Задание: Исследовать и построить график функции:

1) $y = \frac{x^2}{x-4}$
2) $y = \frac{x}{x^2-4}$

Контрольные вопросы:

1) Сформулируйте план исследования данной функции.
2) Как найти промежутки монотонности функции?
3) Сформулируйте правило исследования функции на экстремумы
4) Как найти промежутки выпуклости графика функции?
5) Какая прямая называется асимптотой?

Практическая работа №6

Раздел 3. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Тема: Вычисление неопределенных интегралов методом замены переменной и по частям.

Количество часов: 2

Цели: проверить на практике знание понятия неопределённого интеграла, умение вычислять табличные интегралы, умение вычислять неопределённый интеграл методом введения новой переменной и интегрирования по частям.

Задачи: закрепить умение вычислять неопределенные интегралы методом введения новой переменной и интегрирования по частям.

Теоретический материал

Таблица интегралов

1.	$\int 0dx = C$	9.	$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tg\, x + C$
2.	$\int 1dx = x + C$	10.	$\int \frac{dx}{sin^2 x} = -ctg\, x + C$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	11.	$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$
4.	$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert + C$	12.	$\int \frac{1}{x^2-a^2}dx = \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$

5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	13.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin\frac{x}{a} + C$ $= -arccos\frac{x}{a} + C$
6.	$\int e^x dx = e^x + C$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \alpha}} = ln\left\|x + \sqrt{x^2 + \alpha}\right\| + C$
7.	$\int \sin x\ dx = -\cos x + C$	15.	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$
8.	$\int \cos x\, dx = \sin x\ + C$	16.	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}\right\| + C$

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1) Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2) Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3) Находят дифференциалы старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4) Производят замену под интегралом.
5) Находят полученный интеграл.
6) В результате производят обратную замену, т.е. переходят к старой переменной.

- Формула замены переменной: $\int \boldsymbol{f(x)dx} = \int\big(\boldsymbol{\varphi(t)}\big)\boldsymbol{\varphi}\ \ \boldsymbol{(t)dt} = \int \boldsymbol{g(t)dt}$, где $x=\varphi(t)$, причём должна существовать обратная функция $t = \varphi'(x)$.
- Формула интегрирования по частям имеет вид: $\int \boldsymbol{udv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{vdu}$.

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание: Вычислить неопределенные интегралы:

Вар.	Задание 1	Задание 2	Задание 3	Задание 4	Задание 5
1	$\int cos3x\ dx$	$\int x\ e^{x^2}\ dx$	$\int \frac{x^2\ dx}{\sqrt{9 + 2x^3}}$	$\int \frac{2^x\ dx}{1 - 4^x}$	$\int (x - 2)\ sinx\ dx$
2	$\int (8 + 5x)^6\ dx$	$\int sin^3x\ cosx\ dx$	$\int \frac{sinx\ dx}{(1 + 3cosx)^4}$	$\int \frac{arcsinx\ dx}{\sqrt{1 - x^2}}$	$\int x\ cos3x\ dx$
3	$\int e^{3x-2}\ dx$	$\int (2x^3 - 1)^4\ x^2\ dx$	$\int \frac{7x^5\ dx}{1 + 3x^6}$	$\int \frac{coslnx\ dx}{x}$	$\int x\ e^{4x} dx$

4	$\int \frac{dx}{5x-7}$	$\int e^{cosx}\, sinx\, dx$	$\int \frac{cosx\, dx}{6+sinx}$	$\int \frac{lnx\, dx}{x}$	$\int (3x + 1)\, lnx\, dx$

Контрольные вопросы:
1. Что называется неопределённым интегралом?
2. Как выполняется интегрирование методом замены переменной?
3. Какой вид имеет формула интегрирования по частям?

Практическая работа №7

Раздел 3. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Тема: Интегрирование функций различными методами.

Количество часов: 2

Цели: закрепить навыки интегрирования рациональных и иррациональных дробей.

Задачи: уметь интегрировать рациональные и иррациональные дроби.

Теоретический материал

Интегрирование рациональных дробей.

Общее правило интегрирования рациональных дробей:

Если дробь неправильная, то представить её в виде суммы многочлена и правильной дроби.

Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить её в виде суммы простейших рациональных дробей.

Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание:

Вариант 1

1.Найдите интеграл от рациональной функции методом неопределенных коэффициентов:$\int \frac{3dx}{x^2-5x+6}$.

2.Найдите интеграл от иррациональный функции:$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt{x+2}}$.

3.Найдите интеграл от квадратичной иррациональности:$\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-4x+7}}$.

Вариант 2

1.Найдите интеграл от рациональной функции методом неопределенных коэффициентов:$\int \frac{x+2}{x^2-3x}dx$.

2.Найдите интеграл от иррациональный функции:$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$.

3. Найдите интеграл от квадратичной иррациональности:$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$.

Контрольные вопросы:
1. Сформулируйте определение рациональной функции, иррациональной функции.
2. Какие дроби называются рациональными? На какие виды они делятся?
3. Для чего применяют метод сравнивания коэффициентов?
4. Сформулируйте общее правило интегрирования рациональных дробей.

Практическая работа №8

Раздел 3. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Тема: Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Количество часов: 2

Цели: проверить на практике применение определённого интеграла.

Задачи: уметь решать прикладные задачи с использованием определенного интеграла.

Теоретический материал

Площадь криволинейной трапеции: $S = \int_a^b f(x)dx$**.**

Объем тела вращения: $V = \pi \int_a^b f^2(x)dx/$

Путь, пройденный точкой: $S = \int_a^b v(x)dx$.

Работа силы: $A = \int_a^b F(x)dx$.

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание. Решить задачи:

Вариант № 1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 3x^2 + 1$ и прямой $3x - y + 7 = 0$.
2. Найти объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ вокруг оси Oy.
3. Скорость прямолинейного движения тела выражается формулой $v = 2t + 3t^2$ $(м/с)$. Найти путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.
4. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 7 см, если известно, что от нагрузки в 2 Н она растягивается на 2 см?

Вариант № 2

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $x - y + 3 = 0$.
2. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{4}$ и $y = 4$ вокруг оси Oy.
3. Скорость тела, движущегося прямолинейно, задается формулой $v = 6t - t^2$ $(м/с)$. Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки.
4. Сила в 60 Н растягивает пружину на 3 см. Первоначальная длина пружины 14 см. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее до 15 см?

Контрольные вопросы:

1. Перечислите приложения определённого интеграла к различным геометрическим и физическим задачам.
2. Как с помощью определённого интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y = f(x) и y = φ(x)?
3. Как с помощью определённого интеграла вычислить объём тела вращения?

Практическая работа № 9

Раздел 4. Основы теории комплексных чисел

Тема: Переход от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической, показательной и обратно.

Количество часов: 2

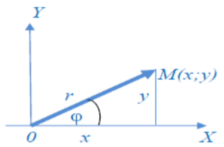
Цели: повторить три вида комплексного числа. Закрепить на практике переход от одной формы комплексного числа к другой.

Задачи: уметь выполнять переход от одной формы записи комплексного числа к другой и наоборот.

Теоретический материал

- Число вида $z = x + i\,y$, где x и y – любые действительные числа, а i – мнимая единица,

  определяемая равенством $i^2 = -1$, называется *комплексным числом*.
- Числа x и y называются соответственно *действительной и мнимой частями* комплексного числа z и обозначаются: $x = Re\,z$, $y = Im\,z$.
- Запись комплексного числа в виде $z = x + i\,y$ называется *алгебраической формой комплексного числа.*
- Комплексное число $z = x + i\,y$ может быть изображено в декартовой координатной плоскости XOY либо точкой с абсциссой x и ординатой y, либо радиус-вектором этой точки:



- Длина этого вектора называется *модулем* комплексного числа z и обозначается **|z| или r:**

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- Угол, образованный этим вектором с положительным направлением действительной оси Ox, называется *аргументом* числа z и обозначается **Arg z. .**

$$-\pi < \arg z \le \pi, tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

- Два комплексных числа $z_1 = x_1 + i\,y_1$ и $z_2 = x_2 + i\,y_2$ считаются *равными*, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.
- Два комплексных числа $z = x + i\,y$ и $\bar{z} = x + i\,y$, отличающиеся только знаком мнимой части, называются *сопряженными.*
- *Тригонометрическая* форма комплексного *числа* $z = x + i\,y$ имеет вид*:*

$$z = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

- *Показательная* форма комплексного *числа* $z = x + i\,y$ имеет вид*:*

$$z = re^{i\varphi},$$

где r и φ - соответственно модуль и главное значение аргумента комплексного числа z.

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание:

Вариант 1

1. Запишите комплексные числа в показательной и тригонометрических формах $z_1 = \frac{1}{2}i,\ \ z_2 = 3 + 3i.$
2. Запишите комплексное число в алгебраической форме $Z=\sqrt{3}(\cos\frac{П}{3} + i\sin\frac{П}{3})$.
3. Выполните действия над комплексными числами в тригонометрической форме $z_1 + z_{2,} z_1 \cdot z_{2,} z_1 : z_2$, если $z_1 = 2(\cos\frac{П}{2} + i\sin\frac{П}{2}),\ z_2 = 3(\cos\frac{П}{2} + i\sin\frac{П}{4})$.

Вариант 2

1. Запишите комплексные числа в показательной и тригонометрических формах $z_1 = \frac{1}{3}i, z_2 = 2 + 2i$
2. Запишите комплексное число в алгебраической форме $Z=2(\cos\frac{П}{6} + i\sin\frac{П}{6})$.
3. Выполните действия над комплексными числами в тригонометрической форме $z_1 + z_{2,} z_1 \cdot z_{2,} z_1 : z_2$, если $z_1 = 3(\cos\frac{П}{6} + i\sin\frac{П}{6}),\ z_2 = 2(\cos\frac{П}{3} + i\sin\frac{П}{3})$.

Контрольные вопросы:

1. Как выполнить переход от алгебраической формы записи комплексного числа к показательной и тригонометрической форме?

Практическая работа № 10

Раздел 4. Основы теории комплексных чисел

Тема: Действия над комплексными числами в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

Количество часов: 2

Цели: закрепить навыки выполнения действий над комплексными числами в разных формах.

Задачи: уметь выполнять действия над комплексными числами.

Теоретический материал

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами, учитывая, $i^2 = -1$.

- *Сумма (разность)* комплексных чисел определяется равенством

$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i$.

- *Произведение* комплексных чисел определяется равенством

$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) =$

$= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i,$

т.к. $i^2 = -1$.

- *Деление* двух комплексных чисел определяется равенством

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)\cdot(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)\cdot(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Тригонометрическую форму удобно использовать для выполненияопераций *умножения* и *деления* комплексных чисел.

Даны числа: $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$

- *Произведение* комплексных чисел определяется равенством

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2\big(cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2)\big)$$

- *Деление* двух комплексных чисел определяется равенством

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)\big)$$

Действия над комплексными числами в показательной форме

Даны числа: $z_1 = r_1 e^{\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{\varphi_2}$

- *Произведение* комплексных чисел определяется равенством

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{\varphi_1 + \varphi_2}$$

- *Деление* двух комплексных чисел определяется равенством

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{\varphi_1 - \varphi_2}$$

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание:

Вариант 1

1. Найдите сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел $z_1 = \frac{1}{2}i, \quad z_2 = 3 + 3i$.
2. Выполните действия над комплексными числами в тригонометрической форме$z_1 + z_{2,} z_1 \cdot z_{2,} z_1 : z_2$, если $z_1 = 2(\cos\frac{П}{2} + i\sin\frac{П}{2})$, $z_2 = 3(\cos\frac{П}{2} + i\sin\frac{П}{4})$, ответ запишите в показательной форме.

Вариант 2

1. Найдите сумму, разность, произведение, частное комплексных чисел $z_1 = \frac{1}{3}i, z_2 = 2 + 2i$

2. Выполните действия над комплексными числами в тригонометрической форме$z_1 + z_{2,} z_1 \cdot z_{2,} z_1 : z_2$, если $z_1 = 3(\cos\frac{\Pi}{6} + i\sin\frac{\Pi}{6})$, $z_2 = 2(\cos\frac{\Pi}{3} + i\sin\frac{\Pi}{3})$, ответ запишите в показательной форме.

Контрольные вопросы:

1. Как выполнять действия над комплексными числами в алгебраической, показательной и тригонометрической формах?

Практическая работа № 11

Раздел 5. Дифференциальные уравнения

Тема: Нахождение частных решений дифференциальных уравнений первого порядка.

Количество часов: 2

Цели: отработать навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Задачи: уметь находить общее и частное решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Теоретический материал

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или её дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

Уравнение вида ***f(x)dx+φ(y)dy****=0 (2)*,где ***f(x)*** и ***φ***(y) - данные функции, называется *уравнением с разделенными переменными.*

Это уравнение можно переписать в виде ***f(x)dx=– φ(y)dy*** и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Каждая часть уравнения с разделенными переменными представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной.

Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Уравнение вида *f(x)F(y)dx+****φ****(x)Ф(y)dy=0,* где *f(x), F(y),* ***φ****(x), Ф(y)* - заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными. (3)*

Уравнение **(3)** можно привести к виду **(2),** если разделить все его члены на произведение ***φ****(x)Ф(y).*

Алгоритм **реше***ния дифференциального уравнения* с разделяющимися **пере**менными:

1. Выражают производную функции через дифференциалы *dx* и *dy.*

2. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.

3. Разделяют переменные.

4. Интегрируют обе части равенства и находят общее **реше**ние.

5. Если заданы начальные условия, то находят частное **ре**шение.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка имеют следующий вид:

$$y' + g(x)y = f(x),$$

где $g(x)$ и $f(x)$ некоторые функции.

Для решения такого типа уравнений можно применить метод Бернулли, либо метод Лагранжа (вариация произвольной постоянной).

Метод Бернулли

- Выполняем подстановку $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$, где $u(x), v(x)$ некоторые функции.

- Строим систему уравнений, чтобы найти $u(x)$и $v(x)$.
- Подставляем $u(x), v(x)$ в $y = uv$, чтобы получить общее решение.

Метод Лагранжа (вариация произвольной постоянной)

- Находим общее решение однородного уравнения.
- В общем решении заменяем постоянную С на функцию $C(x)$.
- Находим y$'$ и подставляем его вместе с y в исходное уравнение.
- Получаем чему равно $C(x)$ из последнего равенства.
- Подставляем $C(x)$ в ранее полученное общее решение и записываем ответ.

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание: Решить дифференциальное уравнение первого порядка:

1) $y' = 1 + x$

2) $(1+x^2)y' - 2xy = 0$

3) $ydy - (1 + 2x)dx = 0$

4) $(1+x^3)y' = 3x^2 y$, если y(0)=2

5) $2\sqrt{y}dx - dy = 0$, если y(0)=1

6) $y' + y\sin 2x = 0$, если $y(\frac{\pi}{4}) = 1$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения первого порядка.
2. Что называют общим решением дифференциального уравнения первого порядка?
3. В чём заключается задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка?
4. Уравнение какого вида называют дифференциальным уравнением первого порядка с разделенными переменными? с разделяющимися переменными?
5. Каким способом можно решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными? с разделяющимися переменными?
6. Какие уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка?
7. Какие линейные уравнения называются однородными, неоднородными дифференциальными уравнениями первого порядка?
8. Как найти общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка?
9. Как найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка?

Практическая работа № 12

Раздел 5. Дифференциальные уравнения

Тема: Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

Количество часов: 2

Цели: закрепить навыки решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Задачи: уметь находить общее и частное решения дифференциальных уравнений первого порядка.

Теоретический материал

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее производные искомой функции или её дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

Уравнение вида $\boldsymbol{f(x)dx+\varphi(y)dy}=0$ *(2)*,где $\boldsymbol{f(x)}$ и $\boldsymbol{\varphi}$(y) - данные функции, называется *уравнением с разделенными переменными.*

Это уравнение можно переписать в виде $\boldsymbol{f(x)dx=-\varphi(y)dy}$ и рассматривать как равенство двух дифференциалов. Каждая часть уравнения с разделенными переменными представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной.

Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

Уравнение вида $f(x)F(y)dx+\varphi(x)\Phi(y)dy=0$, где $f(x)$, $F(y)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$ - заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными. (3)*

Уравнение **(3)** можно привести к виду **(2),** если разделить все его члены на произведение $\varphi(x)\Phi(y)$.

Алгоритм **реше***ния дифференциального уравнения* с разделяющимися **пере**менными:

1. Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.
2. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.
3. Разделяют переменные.
4. Интегрируют обе части равенства и находят общее **реше**ние.
5. Если заданы начальные условия, то находят частное **ре**шение.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка имеют следующий вид:

$$y' + g(x)y = f(x),$$

где $g(x)$ и $f(x)$ некоторые функции.

Для решения такого типа уравнений можно применить метод Бернулли, либо метод Лагранжа (вариация произвольной постоянной).

Метод Бернулли

- Выполняем подстановку $y = uv, \quad y' = u'v + uv'$, где $u(x), v(x)$ некоторые функции.
- Строим систему уравнений, чтобы найти $u(x)$и $v(x)$.
- Подставляем $u(x), v(x)$ в $y = uv$, чтобы получить общее решение.

Метод Лагранжа (вариация произвольной постоянной)

- Находим общее решение однородного уравнения.
- В общем решении заменяем постоянную С на функцию $C(x)$.
- Находим y′ и подставляем его вместе с y в исходное уравнение.

- Получаем чему равно $C(x)$ из последнего равенства.
- Подставляем $C(x)$ в ранее полученное общее решение и записываем ответ.

<u>Порядок выполнения работы</u>

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

<u>Задание:</u>

Вариант 1

1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными: $y^3dx = \frac{dy}{x+1}$, найти его частное решение, если $y_0 = 2$ при x_0=0.
2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' = 2 + y$.
3. Найдите общее решение дифференциального уравнения $xy' + y = 3$.
4. Найти: а) общее решение линейного дифференциального уравнения $y' - \frac{y}{x} = x$;

б) частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.

Вариант 2

1. Решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными: $e^{2x}dx = \sqrt{y}dy$, найти его частное решение, если $y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.
2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y' - xy + y = 0$.
3. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' + \frac{2y}{x} = x$.
4. Найти: а) общее решение линейного дифференциального уравнения $y' - y = e^x$;

б) частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_0 = 1$ при $x_0 = 0$.

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения первого порядка.
2. Что называют общим решением дифференциального уравнения первого порядка?
3. В чём заключается задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка?
4. Уравнение какого вида называют дифференциальным уравнением первого порядка с разделенными переменными? с разделяющимися переменными?
5. Каким способом можно решить дифференциальное уравнение первого порядка с разделенными переменными? с разделяющимися переменными?
6. Какие уравнения называются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка?
7. Какие линейные уравнения называются однородными, неоднородными дифференциальными уравнениями первого порядка?
8. Как найти общее решение линейного дифференциального уравнения

первого порядка?

9. Как найти частное решение линейного дифференциального уравнения первого порядка?

Практическая работа №13

Раздел 5. Дифференциальные уравнения

Тема: Нахождение частных решений дифференциальных уравнений второго порядка.

Количество часов: 2

Цели: отработать навыки решения дифференциальных уравнений второго порядка.

Задачи: уметь находить общее и частное решения неполных и линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теоретический материал

Неполные дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка имеют вид $y'' = f(x)$. Для решения таких уравнений делают замену $y' = p(x)$.

Алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1. Записывают дифференциальное уравнение в виде
$y'' + py' + qy = 0.$
2. Составляют его характеристическое уравнение
$k^2 + pk + q = 0$
3. Вычисляют его дискриминант
$D = p^2 - 4q.$

а) Если $D > 0,$ то уравнение имеет два разных корня k_1 и k_2, а общее решение записывается в виде $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$

б) Если $D = 0$, то уравнение имеет два корня $k_1 = k_2$, а общее решение записывается в виде
$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$

в) Если $D < 0,$ то уравнение имеет комплексные корни
$k_{1,2} = a \pm bi,$ то общее решение записывается в виде $y = e^{ax}(C_1 cosbx + C_2 sinbx).$

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание: Решить дифференциальные уравнения второго порядка.

1) $\acute{o}'' - 7\acute{o}' + 12\acute{o} = 0$

2) $\acute{o}'' - 4\acute{o}' + 5\acute{o} = 0$

3) $\acute{o}'' - 3\acute{o}' - 10\acute{o} = 0$

4) $\acute{o}'' + 2\acute{o}' + 3\acute{o} = 0$

5) $\acute{o}'' - 8\acute{o}' + 15\acute{o} = 0$

6) $\acute{o}'' + 4\acute{o}' + 12\acute{o} = 0$

Контрольные вопросы:

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения второго порядка.
2. Дайте определение общего решения дифференциального уравнения второго порядка.
3. В чём заключается задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка?
4. Как решают неполные дифференциальные уравнения второго порядка?
5. Как найти общее и частное решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами?

Практическая работа №14

Раздел 5. Дифференциальные уравнения

Тема: Решение дифференциальных уравнений второго порядка.

Количество часов: 2

Цели: закрепить навыки решения дифференциальных уравнений второго порядка.

Задачи: уметь находить общее и частное решения неполных и линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Теоретический материал

Неполные дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка имеют вид $y'' = f(x)$. Для решения таких уравнений делают замену $y' = p(x)$.

Алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами:

1. Записывают дифференциальное уравнение в виде
$y'' + py' + qy = 0$.
2. Составляют его характеристическое уравнение
$k^2 + pk + q = 0$
3. Вычисляют его дискриминант
$D = p^2 - 4q$.

а) Если $D > 0$, то уравнение имеет два разных корня k_1 и k_2, а общее решение записывается в виде $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$

б) Если $D = 0$, то уравнение имеет два корня $k_1 = k_2$, а общее решение записывается в виде
$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$

в) Если $D < 0$, то уравнение имеет комплексные корни
$k_{1,2} = a \pm bi$, то общее решение записывается в виде $y = e^{ax}(C_1 cosbx + C_2 sinbx)$.

<u>Порядок выполнения работы</u>

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

<u>Задание:</u>

Вариант 1

1. Найдите общее решение дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = x + \sin x$.
2. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 2y = 0$.
3. Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y = -1$, $y' = 3$ при $x=0$.
4. Вариант 2
5. Найдите общее решение дифференциальное уравнение второго порядка $y'' = x^2 - \cos x$.
6. Найдите общее решение дифференциальное уравнение $y'' - 5y' + 4y = 0$.
7. Найдите частное решение линейного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 6y = 0$, если $y = 1$, $y' = -1$ при $x=0$.

Контрольные вопросы:

1 Сформулируйте определение дифференциального уравнения второго порядка.

2 Дайте определение общего решения дифференциального уравнения второго порядка.

3 В чём заключается задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка?

4 Как решают неполные дифференциальные уравнения второго порядка?

5 Как найти общее и частное решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами?

Практическая работа №15

Раздел 6. Элементы линейной и векторной алгебры

Тема: Выполнение операций над матрицами. Обращение матриц.

Количество часов: 2

Цель: повторить определение матрицы, правила действий над матрицами. Закрепить на практике выполнение действий над матрицами. Повторить определение обратной матрицы, закрепить на практике правило нахождения обратной матрицы.

Задачи: уметь выполнять действия над матрицами. Уметь находить матрицу обратную данной.

Теоретический материал

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит $\boldsymbol{m}$ строк и $\boldsymbol{n}$ столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Виды матриц:

1. ***Прямоугольная*** (число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$)),

например, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

2. ***Квадратная*** (число строк матрицы равно числу столбцов ($m = n$)).

- Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее ***порядком***,
- Диагональ, содержащую элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, называют ***главной***, другую - ***побочной***.

3. ***Нулевая*** (матрица, все элементы которой равны нулю), обозначается:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. ***Единичная*** (квадратная матрица, у которой элементы главной диагонали равны единице, остальные нули), обозначается: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. ***Матрица-строка*** (матрица, имеющая только одну строку) $A = (a_{11} \quad a_{12} \dots \quad a_{1n})$.
6. ***Матрица-столбец*** (матрица, имеющая только один столбец)

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами

1. **Сложение матриц.**

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц A и B называется матрица, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Например: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 4 \\ 5 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

2. **Вычитание матриц.**

Разностью двух матриц A и B называется матрица, элементы которой равны разности соответствующих элементов матриц A и B.

Например: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

3. **Умножение матрицы на число.**

Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент этой матрицы умножить на это число.

Например: $3 * \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \\ 5 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 0 & -6 \\ 15 & -9 & 18 \end{pmatrix}$

4. **Произведение матриц.**
Умножение матрицы A на матрицу Bопределено тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда произведение матрицы A размером $m \times k$ на матрицу B размером $k \times n$ называется такая матрица С размера $m \times n$ каждый элемент которой равен сумме произведений соответствующих элементов -строки первой матрицы на элементы j-столбца второй матрицы: $c_{ij} = a_{i1} * b_{1j} + a_{i2} * b_{2j} + \cdots + a_{ik} * b_{kj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is} * b_{sj}$.

Обращение матриц

- Квадратная матрица называется ***обратной*** по отношению к данной матрице, если ее умножение как справа, так и слева на данную матрицу дает единичную матрицу, т. е. $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = E$

Нахождение обратной матрицы называется ***обращением*** данной ***матрицы***.

Так, обратная матрица для матрицы A третьего порядка имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \frac{A_{31}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \frac{A_{32}}{\Delta} \\ \frac{A_{13}}{\Delta} & \frac{A_{23}}{\Delta} & \frac{A_{33}}{\Delta} \end{pmatrix},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ – определитель матрицы A.

A_{ij}- алгебраические дополнения элементов матрицы A, которые являются произведениями $(-1)^{i+j}$на минор (определитель второго порядка), полученный путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

<u>Порядок выполнения работы</u>

1. Выполнить действия над матрицами.
1) в данном примере расставить порядок действий;
2) выполнить действия;
3) записать ответ.
2. Найти матрицу обратную данной.
1) вычислить определитель данной матрицы;
2) вычислить алгебраические дополнения элементов исходной матрицы;
3) записать обратную матрицу, используя формулу обратной матрицы;
4) сделать проверку;
5) записать ответ.

Задания:

Номер варианта	Задание 1	Задание 2
1	$2 * (A + B) \times (2 * B - A)$ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
2	$2 * (A - B) \times (A + 2 * B)$ $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	$C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы:

1. Что называется матрицей размера $m \times n$?
2. Какие матрицы называются равными?
3. Какие матрицы называются прямоугольными?
4. Какие матрицы называются квадратными?
5. Какая матрица называется нулевой?
6. Какая матрица называется единичной?
7. Какая матрица называется матрицей-строкой?
8. Какая матрица называется матрицей-столбцом?
9. Какая матрица называется противоположной данной?
10. Как найти сумму двух матриц?
11. Как найти разность двух матриц?
12. Как умножить матрицу на число?
13. Как найти произведение двух матриц?
14. Какой вид имеет обратная матрица?
15. Как найти матрицу обратную матрице A?

Практическая работа №16

Раздел 6. Элементы линейной и векторной алгебры

Тема: Решение СЛАУ методом обратной матрицы и методом Гаусса.

Количество часов: 2

Цель: приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по решению систем n линейных уравнений с n переменными методом обратной матрицы и методом Гаусса.

Задачи: уметь решать системы линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы и методом Гаусса.

Теоретический материал

- ***Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ),*** содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \qquad (1)$$

где (a_{ij}) – коэффициенты системы, $(\, i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}\,)$,

b_i – свободные члены

x_j – неизвестные члены

- ***Решением системы*** (1) называется совокупность чисел $(k_1, k_2, \dots, k_n)$, которая при подстановке в систему (1) вместо неизвестных обращает каждое уравнение системы в тождество.
- Система называется ***совместной***, если она имеет решение.
- Система называется ***совместной определенной***, если она имеет единственное решение.
- Система называется ***неопределенной***, если она имеет множество решений.
- Система называется ***несовместной***, если она не имеет решение.

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Метод обратной матрицы

Метод обратной матрицы используется при решении систем линейных алгебраических уравнений, если число неизвестных равно числу уравнений.

Суть метода:

Пусть задана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Эту систему можно записать в виде матричного уравнения $A \times X = B$,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов при неизвестных

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица – столбец неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} - \text{ матрица} - \text{столбец свободных членов.}$$

Из полученного матричного уравнения необходимо выразить X. Для этого умножим обе части матричного уравнения слева на A^{-1}, получим: $A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B$.
Так как $A^{-1} \times A = E$, то $E \times X = A^{-1} \times B$ или $\boldsymbol{X = A^{-1} \times B}$. Далее находится обратная матрица A^{-1} и умножается на столбец свободных членов.
Замечание:

Обратная матрица к матрице A существует только при условии, что $detA \neq 0$ (определитель матрицы A). Поэтому при решении системы линейных уравнений методом обратной матрицы в первую очередь вычисляется $detA$. Если $detA \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти методом обратной матрицы, если же $detA = 0$, то методом обратной матрицы решить эту систему нельзя.

Метод Гаусса

Метод Гаусса - это метод последовательного исключения неизвестных.
Суть его состоит в преобразовании системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

к системе с треугольной матрицей, из которой затем последовательно (обратным ходом) получаются значения всех неизвестных.

I этап. Считая, что $a_{11} \neq 0$ (ведущий элемент) разделим на a_{11} коэффициенты первого уравнения (выполнение этого условия всегда можно добиться путем перестановки уравнений системы (1)). Получим: $x_1 + a_{12}{}^{/}x_2 + \dots + a_{1n}{}^{/}x_n = b_1{}^{/}$ (2)

II этап. Используя уравнение (2), легко можно исключить неизвестное x_1 из остальных
уравнений системы (для этого достаточно каждое уравнение сложить с уравнением (2), предварительно умноженным на соответствующий противоположный коэффициент при x_1).

III этап. Вслед за этим, оставив первое уравнение в покое, над остальными уравнениями системы совершим аналогичное преобразование: выберем из их числа уравнение с ведущим элементом $a_{12}{}^{/} \neq 0$ и исключим с его помощью из остальных уравнений x_2.

IV, V, ... этапы. Повторяя этот процесс, вместо системы (1) получим равносильную ей систему с треугольной матрицей:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{12}x_2 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \qquad \alpha_{22}x_2 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \qquad\qquad\qquad \alpha_{nn}x_n = \beta_n \end{cases} \quad (3)$$

Заключительный этап. Из системы (3) последовательно находим значения всех неизвестных x_n.

Порядок выполнения работы

1. Решить систему методом обратной матрицы.

1) составить три матрицы: матрицу коэффициентов при неизвестных, матрицу-столбец неизвестных, матрицу-столбец свободных членов;

2) записать систему в матричной форме;

3) воспользовавшись формулой для решения системы методом обратной матрицы, найти значения всех неизвестных;

4) устно сделать проверку, подставив значения полученных неизвестных в каждое уравнение системы;

5) записать ответ.

2. Решить систему методом Гаусса.

1) привести данную систему с помощью эквивалентных преобразований к системе с треугольной матрицей ;

2) начиная с последнего уравнения последовательно найти значения всех неизвестных;

3) устно сделать проверку, подставив значения полученных неизвестных в каждое уравнение системы;

4) записать ответ.

Задания:

Вариант 1

1. $\begin{cases} 5x-5y+4z=-3 \\ x-y-5z=11 \\ 4x-3y-6z=-9 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+2z=5 \\ 3x+4y+4z=11 \end{cases}$.

Вариант 2

1. $\begin{cases} x-4y-2z=0 \\ 3x-5y-6z=-21. \\ 3x+y+z=-4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x+2y+2z=5 \\ 3x+4y+4z=12 \end{cases}$

Контрольные вопросы:

1. Что называется системой, содержащей m линейных уравнений с n неизвестными?
2. Что называется решением системы?
3. Какая система называется совместной?
4. Какая система называется совместной определенной?
5. Какая система называется неопределенной?
6. Какая система называется несовместной?
7. В чем состоит суть метода обратной матрицы?
8. Как решить систему методом Гаусса?

Практическая работа №17

Раздел 6. Элементы линейной и векторной алгебры

Тема: Вычисление скалярного, векторного и смешанного произведения векторов.

Количество часов: 2

Цель: развитие умений и навыков по вычислению скалярного, смешанного, векторного произведения векторов.

Задачи: уметь находить скалярное, векторное и смешанное произведение векторов.

Теоретический материал

Пусть даны векторы: $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $\vec{c}=(x_3;\ y_3;\ z_3)$

Скалярное произведение: *Скалярным произведением двух векторов* $\overline{a}$ и $\overline{b}$называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot cos < (\overline{a}; \overline{b})$, в координатной форме $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

Векторное произведение: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_1 \end{vmatrix}$

Смешанное произведение: $\overrightarrow{(a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$

Действия с векторами в координатах:

1) *Правило сложения векторов*. Если даны векторы $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, $\overline{\omega}(\omega_1; \omega_2; \omega_3)$, то их суммой является вектор $\overline{v} + \overline{\omega}$=$(v_1 + \omega_1; v_2 + \omega_2; v_3 + \omega_3)$.

2) *Правило умножения вектора на число*. Для того чтобы вектор $\overline{v}(v_1; v_2; v_3)$, умножить на число μ, необходимо каждую координату данного вектора умножить на число μ: $\mu\overline{v}(\mu v_1; \mu v_2; \mu v_3)$.

Угол между векторами. $\cos < (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$.

Площадь треугольника: $S = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

Объем пирамиды: $V = \frac{1}{6}|\overrightarrow{(a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в рабочей тетради.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание: решить задачи

а) Даны точки A(0;2;5) и B(–4;7;15). Найти длину вектора $|\overline{BA}|$.

б) Даны векторы $\overline{a}(-2; 6)$, $\overline{b}(-4\sqrt{2}; 2; 0)$. Найти их длины.

в) Даны векторы $\overline{a}$(1;–2); $\overline{b}$(2;0) и $\overline{c}(-4; 2)$. Найти $3\overline{a} - 5\overline{b} + \frac{1}{2}\overline{c}$ и $-2(\overline{a} - 2\overline{c}) + 4\overline{b}$.

г) Найти $\overline{c}\overline{d}$, если $|\overline{c}| = 3$, $|\overline{d}| = \sqrt{2}$, а угол между векторами равен135^0.

д) Найти скалярное произведение векторов $\overline{c} = = -\overline{a} + 2\overline{b}$ и $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b}$, если известно, что $|\overline{a}| = 8\sqrt{2}$, $|\overline{b}|$=4, $< (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{2}$.

е) Найти длину вектора $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b}$, если $|\overline{a}| = 5$, $|\overline{b}|$=10, $< (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{2\pi}{3}$.

ж) Даны $|\overline{a}| = 3$, $|\overline{b}|$=4 – длины векторов $\overline{a}, \overline{b}$ и угол между ними $< (\overline{a}; \overline{b}) = \frac{\pi}{3}$. Найти угол между векторами $\overline{c} = -2\overline{a} + 3\overline{b}$, $\overline{d} = 4\overline{a} - 3\overline{b}$.

з) найти векторное и смешанное произведение векторов $\overline{a}$(1;–2; 7) и $\overline{b}$(2;0;-6).

и) найти угол между сторонами AB и AC треугольника ABC, если $A = (5; -4; -2)$, $B = (-1; -3; 2)$, $C = (1; -2; 6)$.

к) найти площадь треугольника ABC, если $A = (5; -4; -2)$, $B = (-1; -3; 2)$, $C = (1; -2; 6)$.

Контрольные вопросы:

1) Что называется скалярным произведением? Формула вычисления скалярного произведения.

2) Что называется векторным произведением? Формула вычисления векторного произведения.

3) Что называется смешанным произведением? Формула вычисления смешанного произведения.

4) Как вычислить площадь треугольника, используя векторное произведение?

5) Как вычислить объем пирамиды, используя смешанное произведение?

Практическая работа №18

Раздел 7. Элементы аналитической геометрии

Тема: Решение задач на составление различных уравнений прямой на плоскости.

Количество часов: 2

Цель: развитие умений и навыков по составлению различных уравнений прямых.

Задачи: уметь составлять уравнения прямых.

Теоретический материал

Различные виды уравнений прямой:

- ✓ Каноническое уравнение прямой**:** $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$, где $(m;n)$- направляющий вектор прямой.
- ✓ Уравнение прямой, проходящей через точку и нормальный вектор $\vec{n}=(A;B)$:

  $$\boldsymbol{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}$$
- ✓ Уравнение с угловым коэффициентом: $\boldsymbol{y=kx+b}$
- ✓ Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, где a и b - отрезки, отсекаемые прямой на осях x и y соответственно.
- ✓ Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_A;y_A)$ и $B(x_B;y_B)$:

  $$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}.$$
- ✓ Общее уравнение прямой: $\boldsymbol{Ax+By+C=0}$

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Решить упражнения:

1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(−1;−4) и образующей с положительным направлением оси Ox угол 0 α =135 .

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(3;−1) и имеющей угловой коэффициент, равный 2 .

3. Прямая проходит через точки A(–1;–6) и B(7;2) . Найти отрезки, отсекаемые этой прямой на осях Ox и Oy .

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(− 4;−1) и отсекающей на оси Oy отрезок, равный 3 .

5. Составить уравнение прямой в отрезках, если она пересекает оси координат в точках: 1) A(− 3;0) и B(0;5) 2) A(2;0) и B(0;–4).

6. Найти длину отрезка, заключенного между точками пересечения прямой x/ 12 – y/16 = 1 с осями координат.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, если: 1) M_1(2;1) и M_2(1; 2) ; 2) M_1 (6;0) и M_2 (3; 2); 3) M_1 (5; 4) и M_2 (5;2); 4) M_1 (1;7) и M_2 (3;7).

8. Написать уравнения в отрезках и построить следующие прямые: 1) $5x - 3y + 15 = 0$; 2) $y = 1{,}5x - 1$.

9. Найти площадь треугольника, ограниченного прямой $2x - 5y - 10 = 0$ и осями координат.

Контрольные вопросы:

Какой вид имеют?

1) каноническое уравнение прямой;
2) уравнение прямой, проходящей через точку и нормальный вектор $\vec{n} = (A; B)$;
3) уравнение с угловым коэффициентом;
4) уравнение прямой в отрезках;
5) уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$;
6) общее уравнение прямой.

Практическая работа №19

Раздел 7. Элементы аналитической геометрии

Тема: Решение прикладных задач по теме «Прямая на плоскости».

Количество часов: 2

Цель: развитие умений и навыков по составлению различных уравнений прямых.

Задачи: уметь составлять уравнения прямых.

Теоретический материал

Различные виды уравнений прямой:

- ✓ Каноническое уравнение прямой**:** $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n}$, где $(m; n)$- направляющий вектор прямой.
- ✓ Уравнение прямой, проходящей через точку и нормальный вектор $\vec{n} = (A; B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

- ✓ Уравнение с угловым коэффициентом: $y = kx + b$
- ✓ Уравнение прямой в отрезках: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b - отрезки, отсекаемые прямой на осях x и y соответственно.
- ✓ Уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$:

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

- ✓ Общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Решить задачу: Даны три последовательных вершины параллелограмма: $A(x_1;\ y_1), B(x_2;\ y_2),\ C(x_3;\ y_3)$.

Найти:

1. Уравнение стороны AD.

2. Уравнение высоты, опущенной из вершины B на сторону AD, длину этой высоты.

3. Уравнение диагонали BD.

4. Угол между диагоналями параллелограмма.

№ варианта	$A(x_1;\ y_1)$	$B(x_2;\ y_2)$,	$C(x_3;\ y_3)$
1.	(0; 8)	(-4; -5)	(-8; -2)
2.	(6; 5)	(-6; 0)	(-10; 3)
3.	(10; -1)	(-2; -6)	(-6; -3)
4.	(7; 1)	(-5; -4)	(-9; -1)

Контрольные вопросы:

Какой вид имеют?

1) каноническое уравнение прямой;
2) уравнение прямой, проходящей через точку и нормальный вектор $\vec{n} = (A; B)$;
3) уравнение с угловым коэффициентом;
4) уравнение прямой в отрезках;
5) уравнение прямой, проходящей через две точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$;
6) общее уравнение прямой.

Практическая работа №20

Раздел 7. Элементы аналитической геометрии

Тема: Составление канонических уравнений окружности, эллипса, гиперболы, параболы.

Количество часов: 2

Цели: развитие умений и навыков по решению задач на составление уравнений кривых второго порядка.

Задачи: знать канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы. Уметь составлять канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы.

Теоретический материал

Представителями *линий второго порядка* являются окружность, эллипс, гипербола, парабола.

Канонический вид уравнения - это общепринятый стандартный вид уравнения, когда в считанные секунды становится ясно, какой геометрический объект оно определяет.

Классификация линий второго порядка:

1. *Окружность и её уравнение*

Каноническое уравнение окружности с центром $O(a;b)$ и радиусом R имеет вид: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

2. *Эллипс и его уравнение*

Эллипс – это множество всех точек плоскости, сумма расстояний до каждой из которых от двух данных точек F_1F_2, называемых *фокусами* эллипса, – есть величина постоянная, численно равная длине большой оси этого эллипса: $2a$. При этом расстояния между фокусами меньше данного значения: $|F_1F_2|<2a$.

✓ *Каноническое уравнение эллипса* имеет вид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $(a>b)$.

✓ *Эксцентриситет эллипса* - это отношение расстояния между фокусами к длине большой оси: $\varepsilon = \frac{c}{a}$ или $\varepsilon = \frac{c}{b}$, где a,b и c связаны между собой соотношением: $c^2 = a^2 - b^2$ (при $a>b$) или $c^2 = b^2 - a^2$ (при $b>a$);

причем $0 \leq \varepsilon < 1$.

✓ *Фокусы F_1 и F_2* – заданные точки с координатами: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, если $a>b$;

$F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$, если $b>a$.

✓ *Фокусное расстояние:* $|F_1F_2| = 2c$.

✓ *Большая ось:* $|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2| = 2a$.

✓ *Малая ось:* $|\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2| = 2b$.

3. *Гипербола и её уравнение*

Гипербола – это множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называется *фокусами*) есть величина постоянная.

✓ *Каноническое уравнение гиперболы* имеет вид $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ где a, b и c связаны между собой равенством $c^2 = a^2 + b^2$.

✓ *Фокусы F_1 и F_2* – заданные точки с координатами: $F_1(-c;0)$ и $F_2(c;0)$, если $a>b$, $F_1(0; -c)$ и $F_2(0; c)$, если $b>a$.

✓ *Фокусное расстояние*: $|F_1F_2| = 2c$.

✓ *Действительная ось:* $|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2| = 2a$.

✓ *Мнимая ось:* $|\mathrm{B}_1\mathrm{B}_2| = 2b$.

✓ *Эксцентриситет:* $\varepsilon = \frac{c}{a}$ или $\varepsilon = \frac{c}{b}$

✓ *У гиперболы две симметричные ветви.*

✓ *У гиперболы две асимптоты:* $y = \pm\frac{b}{a}x$.

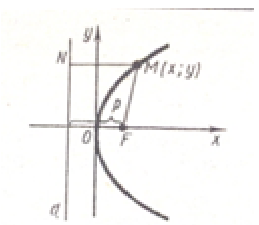
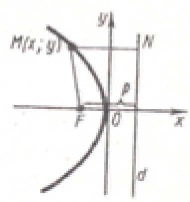
4. *Парабола и её уравнение*

Парабола – это множество точек плоскости, равноудалённых от заданной точки (называемой *фокусом*) и данной прямой (называемой *директрисой* d).

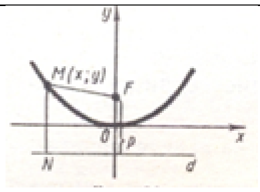
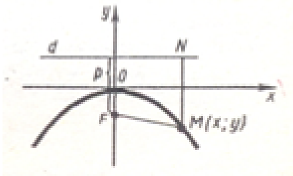
Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс, имеет вид:

$$y^2 = 2px \text{ или } y^2 = -2px.$$

Эти 2 случая представлены в следующей таблице:

		
Положение фокуса	На положительной полуоси Ox	На отрицательной полуоси Ox
Координаты фокуса	$F(\frac{p}{2}; 0)$	$F(-\frac{p}{2}; 0)$
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат, имеет вид: $x^2 = 2py$ или $x^2 = -2py$.
Эти 2 случая представлены в следующей таблице:

		
Положение фокуса	На положительной полуоси *Oy*	На отрицательной полуоси *Oy*
Координаты фокуса	$F(0; \frac{p}{2})$	$F(0; -\frac{p}{2})$
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в рабочей тетради.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Решить задачи:

1) Составить уравнение окружности с центром О(–2; –5) и $R=\sqrt{3}$; О(–5; 0) и $R=3$.

2) Построить окружность: а) $x^2+y^2-10x-6y-2=0$; б) $x^2+y^2-10x+9=0$; в) $x^2+y^2+8x+7=0$.

3) Найти координаты фокусов, длины осей, фокусное расстояние и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением: а)$16x^2+25y^2=400$; б) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$.

4) Составить уравнение эллипса, координаты фокусов которого $F_1(-4;0)$, $F_2(7;0)$, а эксцентриситет $\varepsilon= 0{,}28$.

5) Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси координат, эксцентриситет $\varepsilon= 0{,}6$ и малая ось равна 10.

6) Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(\sqrt{3}; 0)$ и $(-\sqrt{3}; 0)$, а большая ось равна $4\sqrt{7}$.

7) Найти координаты фокусов, длины осей, фокусное расстояние, эксцентриситет и уравнение асимптот гиперболы, заданного уравнением: $7x^2 - 9y^2 = 63$.

8) Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси ординат, если действительная ось равна $4\sqrt{5}$, а эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

9) Составить каноническое уравнение гиперболы, если действительная ось равна 10, а уравнения асимптот имеют вид $y= \pm\frac{5}{3}x$

10) Эксцентриситет гиперболы с фокусами на оси ординат равен 1,4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что $2b = 10$.

11) Найти каноническое уравнение параболы и уравнение директрисы, если фокус параболы точка $A(-2; 0)$.

12) Парабола задана уравнение $x^2 = -32y$. Найдите координаты фокуса и уравнение директрисы.

13) Парабола с вершиной в начале координат симметрична оси Oy и проходит через точку $A(-5; 2)$. Составить каноническое уравнение параболы.

14) Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 24x$.

Контрольные вопросы:

1. Запишите каноническое уравнение эллипса.
2. Запишите каноническое уравнение гиперболы.
3. Запишите каноническое уравнение параболы.

Практическая работа № 21

Раздел 8. Функции многих переменных

Тема: Нахождение области определения функции нескольких переменных.

Количество часов: 2

Цели: повторить определение функции нескольких переменных. Закрепить на практике нахождение области определения функции нескольких переменных.

Задачи: уметь находить область определения функции двух переменных.

Теоретический материал

Определение. Переменная z называется функцией двух переменных *x* и *y*, если:

1) задано множество G пар численных значений *x* и *y*;

2) задан закон, по которому каждой паре чисел $(x; y)$ из этого множества соответствует единственное численное значение.

При этом переменные x и y называются аргументами или независимыми переменными.

Обозначения функций двух переменных аналогичны обозначениям функций одной переменной: $z = f(x;y)$, $z = F(x;y)$, $z = z(x;y)$ и т.д.

Определение. Множество G всех пар значений аргументов данной функции двух переменных называется *областью определения этой функции*, а множество всех значений, принимаемых z в области определения – *областью значений функции*.

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание: Найти область определения функции.

Вариант 1	Вариант 2
1) $z = 5x + y^2$; 2) $z = \frac{1}{\sqrt{xy}}$; 3) $z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$; 4) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;	1) $z = \frac{3}{x^2 + y^2}$; 2) $z = \ln(x + y) + x + y - 1$; 3) $z = \frac{xy}{x - y}$; 4) $z = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}$.

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение функции двух переменных.
2. Как найти область определения функции двух переменных?

Практическая работа №22

Раздел 8. Функции многих переменных

Тема: Вычисление частных производных и дифференциалов функции нескольких переменных.

Количество часов: 2

Цели: повторить определение частных производных и дифференциалов функции нескольких переменных. Закрепить на практике нахождение частных производных и дифференциалов функции нескольких переменных.

Задачи: уметь находить частные производные и вычислять дифференциалы функций двух переменных.

Теоретический материал

Частные производные функции нескольких переменных.

Частной производной функции нескольких переменных по какой-нибудь переменной в рассматриваемой точке называется обычная производная по этой переменной, считая другие переменные фиксированными (постоянными).

Полный дифференциал функции $z = f(x.y)$ находится по формуле:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание:

Вариант 1

1. Найдите частные производные первого порядка функций

а) $Z = x^2 - 5x^2y + 4xy^2 + y^3$; б) $Z = y \cdot \cos(x + y)$; в) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$.

2. Найдите дифференциал первого порядка функции в точке x =1, y = -1, если

а) $Z = x^4 - 2xy + y^4$; б) $Z = e^{x+y} \cdot y$.

Вариант 2

1. 2. Найдите частные производные первого порядка функций:

а) $Z = x^3 + 7x^2y - 2xy^2 + y^3$; б) $Z = e^{x+y} \cdot x$; $z = ln(x^2 - y)$.

2. Найдите дифференциал функции точке x = 1, y = -1, если

а) $\mathrm{Z = x^4 + 3xy + y^4}$; б) $\mathrm{Z = \frac{1}{x} \cdot (y + x)}$.

Контрольные вопросы:

1. Как найти частные производные функции двух переменных?
2. Какую частную производную называют смешанной?
3. Дайте определение дифференциала второго порядка функции двух переменных.

Практическая работа №23

Раздел 8. Функции многих переменных

Тема: Вычисление двойных интегралов

Количество часов: 2

Цели: повторить определение двойного интеграла. Закрепить на практике вычисление двойных интегралов по различным областям.

Задачи: уметь вычислять двойные интегралы.

<u>Теоретический материал</u>

Вычисление двойного интеграла от функции *f(x,y)*, определенной в плоской области *D*, сводится к вычислению двукратного интеграла вида

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy,$$

если область *D* определяется условиями $a \le x \le b$, $f_1(x) \le y \le f_2(x)$,

или к вычислению двукратного интеграла вида

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)dx,$$

если область *D* определяется условиями $c \le y \le d$, $\varphi_1(y) \le y \le \varphi_2(y)$.

С помощью двойного интеграла можно найти площадь плоской фигуры *D* по формуле:

$$S = \iint\limits_D dxdy.$$

<u>Порядок выполнения работы</u>

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.

2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание:

Вариант 1

1. Вычислите интеграл $\iint_D (x^2+2y)\,dxdy$, где D= $\begin{Bmatrix} 0 \le x \le 2, \\ 1 \le y \le 3 \end{Bmatrix}$
2. Вычислите интеграл $\iint_D (x^2-y^2)\,dxdy$, где область D ограничена линиями y = 0,y = x, x =1.
3. Вычислите площадь плоской области, ограниченной линиями $y = x^2+1$, $y = 2x+1$, (сделайте чертёж к заданию).

Вариант 2

1. Вычислите интеграл $\iint_D (y^2+2x)\,dxdy$, гдеD=$\begin{Bmatrix} 0 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 2 \end{Bmatrix}$
2. Вычислите *интеграл* $\iint_D (y^2-x^2)\,dxdy$, где область D ограничена линиями y = 0, y = x, x = 2.
3. Вычислите площадь плоской области, ограниченной линиями $y = -x^2+3, y = 3-2x$ (сделайте чертёж к заданию).

Контрольные вопросы:

1. Дайте определение двойного интеграла от функции двух переменных.
2. Как вычислить двойной интеграл с помощью повторного интегрирования?
3. Как вычислить двойной интеграл в случае области первого типа?
4. Как вычислить двойной интеграл на прямоугольной области?

Практическая работа №24

Раздел 9. Теория рядов

Тема: Исследование на сходимость знакочередующихся рядов.

Количество часов: 2

Цели: закрепить понятия: числовой ряд, сумма числового ряда, ряд с положительными членами, сходящийся, расходящийся ряд. Научиться находить сумму ряда пользуясь определением, исследовать на сходимость положительные ряды.

Задачи: уметь находить сумму ряда по определению, исследовать на сходимость числовые ряды.

Теоретический материал

Пусть задана бесконечная последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$.

Выражение
$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1)$$
называется *числовым рядом* и обозначается $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Сумма конечного числа n первых членов ряда называется *n*-ой *частичной* суммой ряда.

Если существует конечный предел $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$, то его называют *суммой* ряда (1) и говорят, что ряд (1) ***сходится.***

Если $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует (например $S_n\to\infty$, при $n\to\infty$), то говорят, что ряд (1) ***расходится*** и суммы не имеет.

Частные случаи числовых рядов.

Геометрический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^n=a+aq+aq^2+aq^3+aq^4+\ldots+aq^{n-1}+\ldots$$

$$S_n=\frac{a-aq^n}{1-q}\quad \text{или}\quad S_n=\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}.$$

1) Если $|q|<1$, то сходится и его сумма равна $S=\dfrac{a}{1-q}$.

2). Если $|q|>1$, то $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не существует и ряд расходится.

3) Если $q=1$, то ряд имеет вид: $a+a+a+\ldots+a+\ldots$. В этом случае

$S_n=na,\lim\limits_{n\to\infty}na=\infty$, т.е. ряд расходится.

Если $q=-1$, то $a-a+a-a+\ldots$. В этом случае: $S_n=\begin{cases}0, если \quad n-четное,\\ 1, если \quad n-нечетное\end{cases}$.

Следовательно, частичная сумма предела не имеет.

Таким образом, сумма членов геометрической прогрессии (с первым членом отличным от нуля) сходится только тогда, когда знаменатель прогрессии по абсолютной величине меньше единицы.

Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Гармонический ряд расходится.

Обобщенный гармонический ряд

Определение. Обобщенным гармоническим рядом называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots+\frac{1}{n^p}+\ldots$$

если $p>1$ - сходится, а если $p\le 1$ - расходится.

Необходимый признак сходимости рядов

Теорема. (Необходимый признак сходимости ряда). Если ряд сходится, то его *n-й* член стремится к нулю при неограниченном возрастании *n*.

Следствие. Если *n-й* член ряда не стремится к нулю, то ряд расходится.

Положительные ряды

Определение: Положительным рядом называется ряд, члены которого не отрицательны.

Первый достаточный признак сходимости.

Пусть даны два ряда с положительными членами: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и каждый член первого ряда не превосходит соответствующего члена второго ряда $a_1 \le b_1$, $a_2 \le b_2$ и т. д.
Тогда
а) если второй ряд сходится, то и первый ряд сходится,
б) если первый ряд расходится, то и второй ряд расходится.

Второй достаточный признак сравнения

Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

<u>Теорема</u> <u>(Признак сходимости Даламбера).</u> Пусть дан числовой ряд с положительными членами. Если отношение *(n+1)-го* члена к *n-му* члену при $n \to \infty$ имеет конечный предел, т.е.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$$

то 1) при ρ <1 – ряд сходится;
2) при ρ >1 – ряд расходится.

<u>Теорема</u> <u>(Признак Коши).</u> Если для ряда с положительными членами величина $\sqrt[n]{a_n}$ имеет конечный предел l при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = l$

то 1) при l < 1 – ряд сходится;
4) при l > 1 – ряд расходится.

<u>Порядок выполнения работы</u>

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

<u>Задание:</u> решить задачи

Вариант 1

1) Исследуйте ряд на сходимость, используя определение:
$1+1\cdot\frac{1}{3}+1\cdot(\frac{1}{3})^2+1\cdot(\frac{1}{3})^3+\ldots$

2) Исследуйте ряд на сходимость, используя теоремы сравнения рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)\cdot 3^n}$$

3) Исследуйте ряд на сходимость, используя признак Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$.

4) Исследуйте ряд на сходимость, используя признак Коши: $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n}{3n+1})^n$.

Вариант 2

1) Используйте ряд на сходимость, используя определение: $3+3\cdot 2+3\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\ldots$

2) Исследуйте ряд на сходимость, используя теоремы сравнения рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n^3+3}$$

3) Исследуйте ряд на сходимость, используя признак Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n!}$.

4) Исследуйте ряд на сходимость, используя признак Коши: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{2^{3n}}$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение числового ряда, суммы числового ряда.
2. Какой числовой ряд называется сходящимся? Расходящимся?
3. Какой ряд называется гармоническим рядом? Рядом геометрической прогрессии?
4. Сформулируйте теоремы сравнения числовых рядов с положительными членами.
5. Сформулируйте признак Даламбера сходимости рядов.
6. Сформулируйте признак Коши сходимости рядов.

Практическая работа №25

Раздел 9. Теория рядов

Тема: Разложение функций в ряд Тейлора и Маклорена.

Количество часов: 2

Цели: закрепить навыки разложения функций в степенные ряды.

Задачи: уметь раскладывать функции в степенные ряды, выполнять с помощью разложения приближенные вычисления.

Теоретический материал

Формула Тейлора $f(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n$,

где x_0 – заданное число.

Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора

Определение. Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0 имеет производные любого порядка, то для нее можно построить ряд

$$f(x_0)+\frac{(x-x_0)}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\ldots+\frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0)+\ldots,$$

который называется рядом Тейлора в точке x_0 этой функции. Если $x_0=0$, то этот ряд имеет вид

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f'(0)}{n!}x^n+\ldots$$ и называется рядом Маклорена.

Разложение в ряды Маклорена элементарных функций

№ п/п	Формула	Радиус сходимости
1.	$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$	∞
2.	$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$	∞
3.	$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots$	∞
4.	$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots$	$(-1;1]$
5.	$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots$	$(-1;1]$

Порядок выполнения работы

1. Работу необходимо выполнять в тетради для практических занятий.
2. Работу оформлять чернилами одного цвета аккуратным и разборчивым почерком.
3. Условия задач должны быть переписаны полностью.
4. Приступая к решению, следует внимательно изучить методические указания.
5. Следует уделить внимание вопросам для самоконтроля.
6. Решение необходимо сопроводить краткими пояснениями, указав используемые формулы.

Задание:

Вариант 1

1. Разложите многочлен $f(x)=5-3x+2x^2+4x^3+x^4$ по степеням двучлена $(x-2)$.
2. Используя формулы разложения функций в степенные ряды, найдите приближенные значения выражений: а) $\sin 18^\circ$, б) $\sqrt{1{,}056}$

Вариант 2

1. Разложите многочлен $f(x)=3+2x-4x^2+2x^3+x^4$ по степеням двучлена $(x-1)$.

2. Используя формулы разложения функций в степенные ряды, найдите приближенные значения выражений: а) $\cos 28°$, б) $\sqrt{1{,}112}$

Контрольные вопросы:

1. Какой вид имеет формула Тейлора?
2. Как разложить функцию в ряд Маклорена?

Критерии оценки за практическую работу

Оценка «5» ставится, если:

• работа выполнена полностью;

• в логических рассуждениях и обоснованиях решения нет пробелов и ошибок;

• в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Оценка «4» ставится, если:

• работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

• допущена одна ошибка или два-три недочета в выкладках, рисунках, чертежах или графиках (если эти виды работы не являлись специальным объектом проверки).

Оценка «3» ставится, если:

• допущены более одной ошибки или более двух-трех недочетов в выкладках, чертежах или графиках, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме

Оценка «2» ставится, если допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Список источников и литературы

Основные печатные издания

1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ. учреждений сред.проф. образования / В.П. Григорьев, Ю.А. Дубинский, Т.Н. Сабурова. 3-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2020. – 400 с.
2. Григорьев, В. П. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие / В. П. Григорьев, Т. Н. Сабурова. - М.: Издательский Центр "Академия", 2017.-160 с.

Основные электронные издания

1. Гончаренко, В. М., Элементы высшей математики. : учебник / В. М. Гончаренко, Л. В. Липагина, А. А. Рылов. — Москва : КноРус, 2022. — 363 с. — ISBN 978-5-406-11529-9. — URL: https://book.ru/book/949361. — Текст: электронный.